

Exercice 4**7 points****Thèmes : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- la droite \mathcal{D} passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

- la droite \mathcal{D}' dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

- a.** La droite \mathcal{D}' a pour vecteur directeur \vec{u}' de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles.

c. La droite \mathcal{D} est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x-2 = t \\ y-4 = 2t \\ z-0 = 0t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La droite \mathcal{D} a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+2t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Cette droite Δ coupe chacune des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . On appellera M le point d'intersection de Δ et \mathcal{D} , et M' le point d'intersection de Δ et \mathcal{D}' .

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ».

2. Soit le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}$.
- $\vec{v} \cdot \vec{u}' = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}'$.

Le vecteur \vec{v} est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de \mathcal{D} et \mathcal{D}' , donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ .

3. On note \mathcal{P} le plan contenant les droites \mathcal{D} et Δ , c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

a. Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-5) \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}$.
- $\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-5) \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan \mathcal{P} , donc le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

b. Le plan \mathcal{P} est le plan ayant \vec{n} comme vecteur normal et passant par A , donc c'est l'ensemble des points $P(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$.

\overrightarrow{AP} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} &\iff \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \iff (x-2) \times 2 + (y-4) \times (-1) + z \times (-5) = 0 \\ &\iff 2x-4-y+4-5z=0 \iff 2x-y-5z=0 \end{aligned}$$

Donc une équation du plan \mathcal{P} est : $2x - y - 5z = 0$.

- c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et \mathcal{D}' .

Le plan \mathcal{P} contient la droite Δ et M' est un point de la droite Δ ; donc M' est un point du plan \mathcal{P} . M' appartient à \mathcal{D}' et à \mathcal{P} donc M' est le point d'intersection de la droite \mathcal{D}' et du plan \mathcal{P} .

$$\text{Les coordonnées } (x; y; z) \text{ de } M' \text{ vérifient donc le système } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

$2x - y - 5z = 0$ devient $2 \times 3 - (3 + t) - 5(3 + t) = 0$ soit $6 - 3 - t - 15 - 5t = 0$ ou encore $-12 = 6t$ ce qui donne $t = -2$.

$$x = 3; y = 3 + t = 3 - 2 = 1 \text{ et } z = 3 + t = 1$$

Les coordonnées du point M' sont donc $(3; 1; 1)$.

4. a. La droite Δ a pour vecteur directeur \vec{v} et passe par le point M' , donc elle a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$

- b. Le point M est le point d'intersection de \mathcal{D} et de Δ donc ses coordonnées $(x; y; z)$

$$\text{sont solutions du système : } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 0 \\ x = 3 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} 2 + t = 3 + 2t' \\ 4 + 2t = 1 - t' \\ 0 = 1 + t' \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} t = -1 \\ -1 = t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc le point M a pour coordonnées $(1; 2; 0)$.

$$\begin{aligned} \text{c. } MM' &= \sqrt{(x_{M'} - x_M)^2 + (y_{M'} - y_M)^2 + (z_{M'} - z_M)^2} \\ &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- a. On cherche l'intersection de la droite d et du plan \mathcal{P} , et pour cela on résout le

$$\text{système : } \begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

On a donc $2 \times (5t) - (2 + 5t) - 5(1 + t) = 0$ soit $10t - 2 - 5t - 5 - 5t = 0$ ou $0t = 7$.

Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à \mathcal{P} .

- b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan \mathcal{P} .

On veut exprimer le volume V du tétraèdre $ANMM'$ en fonction de ℓ .

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Les points A , M et M' appartiennent au plan \mathcal{P} donc le triangle AMM' forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan \mathcal{P} , c'est-à-dire ℓ .

La droite Δ est la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' donc \mathcal{D} est perpendiculaire à Δ .

A appartient à \mathcal{D} , M est le point d'intersection de \mathcal{D} et de Δ , M' appartient à Δ , et les droites \mathcal{D} et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM' est rectangle en M .

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 4)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{L'aire de la base, c'est-à-dire } AMM' \text{ vaut } \frac{1}{2} \times AM \times MM' = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

$$\text{Le volume du tétraèdre vaut donc } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \ell = \frac{\ell\sqrt{30}}{6}.$$

c. N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d .

La droite d est strictement parallèle au plan \mathcal{P} donc les distances de N_1 et N_2 au plan \mathcal{P} sont égales.

Les bases des tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' sont identiques (le triangle AMM').

Donc les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.